Appunti del corso
“Fondamenti di Analisi e Didattica”

(PAS 2013-2014, Classe A049, docente prof. L. Chierchia)

redatti da:
A. Damiani, V. Pantanetti, R. Caruso, M. L. Conciatore, C. De Maggi, E. Becce
e rivisti da: L. Chierchia
(Le note a piè di pagina sono dei redattori)

Lezione 3
Ancora sulle questioni dei fondamenti

Cominciamo con l’enunciato di un “semplicissimo” risultato:

TEOREMA 1

$$x \cdot 0 = 0 \quad \forall x$$

Naturalmente, l’enunciato del teorema è incompleto: bisogna, infatti, specificare per *quali* x si vuole dimostrare il teorema. Innanzitutto, ne daremo la dimostrazione in $\mathbb{R}$: in questo caso “$\forall x$” sta per “$\forall x \in \mathbb{R}$” ed adotteremo il punto di vista (o “di partenza”) dell’assiomatica di $\mathbb{R}$.

Poi, per illustrare, la differenza con il punto di vista dell’assiomatica di Peano, dimostreremo il teorema per tutti gli $x \in \mathbb{Z}$ e vedremo, in particolare, quanto è più lunga questa strada (sebbene il risultato sia ben più debole).

1. Dimostrazione del TEOREMA 1 a partire dall’assiomatica di $\mathbb{R}$

La definizione assiomatica di $\mathbb{R}$ è costituita, come visto nella prima lezione, da 15 assiomi algebrici ed un assioma di completezza, riassunti nella tabella che riportiamo di nuovo:

Gli assiomi di $\mathbb{R}$

Assiomi dell'operazione additiva	
S_1	Proprietà commutativa della somma $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
S_2	Proprietà associativa della somma $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$
S_3	Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma $\exists 0 \in \mathbb{R} / a + 0 = a \; \forall a \in \mathbb{R}$
S_4	Esistenza dell'opposto $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists -a \in \mathbb{R} / \; a + (-a) = 0$
Assiomi dell'operazione moltiplicativa	
P_1	Proprietà commutativa del prodotto $\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = b * a$
P_2	Proprietà associativa del prodotto $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a * (b * c) = (a * b) * c$
P_3	Esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto $\exists 1 \in \mathbb{R} / a * 1 = a \; \forall a \in \mathbb{R}$
P_4	Esistenza dell'inverso per tutti gli elementi tranne 0 $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \; \exists a^{-1} \in \mathbb{R} / \; a * a^{-1} = 1$
Assiomi del'ordine	
O_1	Riflessività della relazione $\geq$ $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq a$
O_2	Antisimmetria della relazione $\geq$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b, b \geq a \Rightarrow a = b$
O_3	Transitività della relazione $\geq$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$
O_4	La relazione $\geq$ è di ordine totale $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \Leftrightarrow \neg \; b \geq a$
Assiomi della combinazione di operazioni	
SP	Distributività della somma rispetto al prodotto $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a * (b + c) = a * b + a * c$
PO	Ordinamento del prodotto $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow a * b \geq 0$
SO	Invarianza per traslazione $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$
Assioma della completezza	
C_1	Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.

Vediamo, ora, la prima dimostrazione del teorema nell'ambito della teoria assiomatica di $\mathbb{R}$ con $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo, prima, bisogno del seguente risultato

TEOREMA (legge di cancellazione)

$$a + b = a \Rightarrow b = 0$$

DIMOSTRAZIONE[1]

$$b \overset{\exists\, neutro}{=} b + 0 \overset{\exists\, opposto}{=} b + (a - a) \overset{prop\, assoc.}{=} (b + a) - a \overset{prop.\, comm.}{=} (a + b) - a$$

ma per ipotesi è $a + b = a$ quindi

$$b = (a + b) - a = a - a = 0 \Rightarrow b = 0$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Possiamo ora dimostrare che

TEOREMA (l'elemento neutro della somma è elemento assorbente del prodotto). In formule:

$$x \cdot 0 = 0 \quad \forall x$$

DIMOSTRAZIONE

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

Ma per la legge di cancellazione (con $a = b = x \cdot 0$), segue che

$$0 \cdot x = 0$$

2. Dimostrazione del TEOREMA 1 a partire dall'assiomatica di $\mathbb{N}$

In questa sezione dimostreremo il TEOREMA 1 prendendo come punto di partenza gli assiomi di Peano e lo dimostreremo per tutti gli $x \in \mathbb{Z}$.

L'iter che dovremo seguire è il seguente:

(i) definire l'operazione di addizione in $\mathbb{N}$ e dimostrare che tale operazione è commutativa e associativa;

(ii) definire $\mathbb{Z}$;

[1] Si ricorda che $a - b$ significa, per definizione, $a + (-b)$.

(iii) definire su $\mathbb{Z}$ l'addizione, definire lo "zero" (ovvero l'elemento neutro rispetto all'addizione) e l'esistenza dell'opposto;

(iv) infine dimostreremo il teorema.

Cominciamo col ricordare la definizione assiomatica dei naturali dovuta a Peano.

	Gli assiomi di Peano
N_1	σ è iniettiva
	$\forall a, b \in \mathbb{N} \| \sigma(a) = \sigma(b) \Rightarrow a = b$
N_2	Esiste un elemento α in $\mathbb{N}$ che non appartiene a $\sigma(\mathbb{N})$
	$\exists\, \alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha \notin \sigma(\mathbb{N})$
N_3	Vale il principio di induzione
	$A \subseteq \mathbb{N}, \alpha \in A, (n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A) \Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$

Normalmente (e da ora in poi) denoteremo $1 := \alpha$. Il primo risutato che occorre è il "teorema di ricorrenza": una successione *definita* per ricorrenza è, intuitivamente, una successione di cui è dato il primo termine e si sa costruire il termine $n+1$ a partire dal termine n

ESEMPIO: Un sistema dinamico discreto su di un insieme A è una coppia (A, f) con $f : A \to A$. Il problema è studiare le "orbite" di f ossia le successioni x_n dove $x_1 \in A$ è il "dato iniziale" e $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \geq 1$. quali sono le rbite periodiche (ossia orbite tali che $x_{n+m} = x_n$ per ogni n)? esistono orbite asintotiche? etc.

ESEMPIO: La definizione di sommatoria

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

non è una definizione rigorosa in quanto fa leva sull'intuizione e sulla giusta interpretazione dei puntini. La definizione rigorosa è $\sigma_1 = a_1$, $\sigma_{n+1} = \sigma_n + a_{n+1}$.

L'esistenza di successioni definite per ricorrenza è basato sul seguente

TEOREMA (di ricorrenza)

Sia $f_n : A \to A$ una famiglia di funzioni $\forall n \in \mathbb{N}$ e sia $a \in A$. Allora

$$\exists!\, \psi : \mathbb{N} \to A \big| \big[\psi(1) = a, \quad \psi(n+1) = f_n(\psi(n)) \quad \forall n\big]$$

Non daremo qui la dimostrazione di questo teorema che si basa sul terzo assioma di Peano ossia sull'induzione[2].

DEFINIZIONE (somma in $\mathbb{N}$)

Fisso $n \in \mathbb{N}$ e definirò "$n+m$". Definisco la successione per ricorrenza

$$S_1^{(n)} := n+1$$

$$S_{m+1}^{(n)} := S_m^{(n)} + 1$$

A questo punto bisognerebbe dimostrare (proprietà della somma):

1. $S_m^{(n)} = S_n^{(m)}$ (commutatività)
2. $S_{S_k^{(m)}}^{(n)} = S_k^{S_m^{(n)}}$ (associatività)

La dimostrazione di queste affermazioni seguono dal principio di induzione e vengono lasciate alla/o volenterosa/o lettrice/ore.

D'ora in poi possiamo usare la più classica notazione $S_m^{(n)} =: m+n$

DEFINIZIONE (prodotto in $\mathbb{N}$)

Fisso n. definisco

$$p_1^{(n)} := n$$

$$p_{m+1}^{(n)} := p_m^{(n)} + n$$

Adesso bisognerebbe dimostrare

1. $p_m^{(n)} = p_n^{(m)}$ (commutatività)
2. $p_k^{p_m^{(n)}} = p_{p_k^{(m)}}^{(n)}$ (associatività)

Naturalmente, a questo punto, si può subito passare alla notazione standard $p_m^{(n)} = n \cdot m$ (o, semplicemente, nm).

DEFINIZIONE (relazione d'ordine $\geq$)

$n > m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} | n = m + k$

$n \geq m \Leftrightarrow n > m$ oppure $n = m$

[2]Per una dimostrazione si veda http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/PAS_13_14/ricorrenza1.pdf

TEOREMA si dimostra che $n > m \Rightarrow \exists!\ k : n = m + k$

Anche questa affermazione segue dal teorema di insuzione e dall'iniettività di σ.

DEFINIZIONE (sottrazione)

Va usato il fatto che è unico quel k del teorema precedente

Se $n > m$, $n - m = k$ dove k è l'unico numero t.c. $n = m + k$.

Adesso posso definire $\mathbb{Z}$

DEFINIZIONE ($\mathbb{Z}$)

Definiamo in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una relazione d'equivalenza $\sim_{\mathbb{Z}}$ (ma nel seguito ometteremo la $\mathbb{Z}$).

$$(n, m) \sim (p, q) \Leftrightarrow n + q = m + p$$

è di equivalenza perché riflessiva, simmetrica, transitiva (come è facile verificare).

Definiremo quindi $\mathbb{Z}$ come

$$\mathbb{Z} := [(m, n)] := \left\{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (p, q) \sim (n, m) \right\}$$

dove $[(a, b)]$ denota la classe di equivalenza che contiene (a, b).

Adesso le operazioni in $\mathbb{Z}$.

DEFINIZIONE (somma)

$$[(n, m)] + [(p, q)] = [(n + p, m + q)]$$

Bisognerebbe dimostrare che tale definizione è ben posta, ossia:

$$(n, m) \sim (n', m') \text{ e } (p, q) \sim (p', q') \text{ allora } (n + p, m + q) \sim (n' + p', m' + q')$$

DEFINIZIONE (0)

$$0 := [(1, 1)]$$

Tale elemento è l'elemento neutro rispetto alla somma, infatti:

$$[(p, q)] + 0 = [(p, q)] + [(1, 1)] = [(p + 1, q + 1)] = [(p, q)]$$

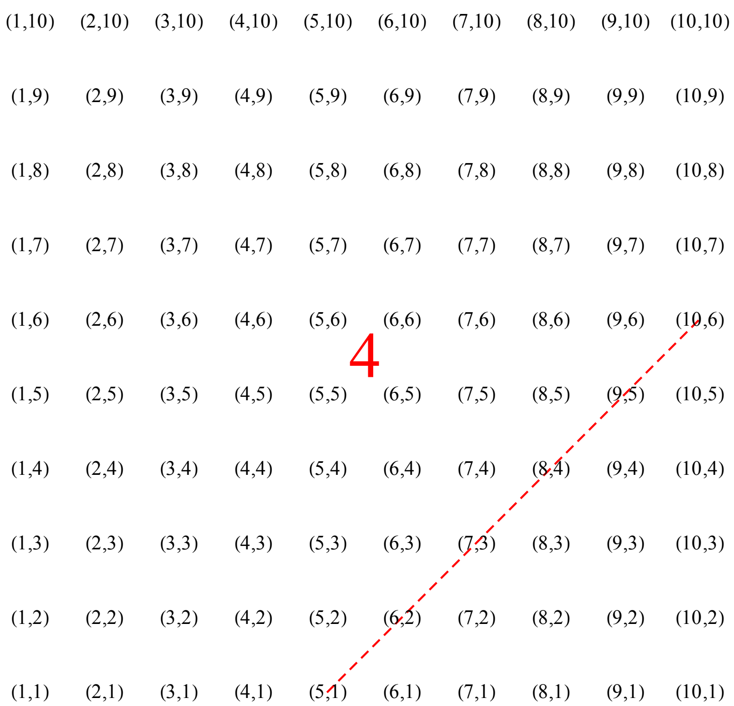

Figura 1: Rappresentazione grafica del numero 4 (I disegni non sono mai necessari ma possono essere utili per sviluppare l'intuito.)

DEFINIZIONE (opposto) Introduco l'opposto

$$-[(p,q)] := [(q,p)]$$

Infatti, $[(p,q)] + [(q,p)] = [(p+q, q+p)] = [(p+q, p+q)] = [(1,1)] = 0$.

DEFINIZIONE ($\geq$)

$$[(n,m)] \geq [(p,q)] \Leftrightarrow n+q \geq m+p$$

Quali sono i numeri non negativi?

$$[(n,m)] \geq [(1,1)] \Leftrightarrow n+1 \geq m+1, n \geq m$$

DEFINIZIONE (prodotto in $\mathbb{Z}$)

$$[(n,m)] \cdot [(p,q)] = [(np+mq, nq+mp)]$$

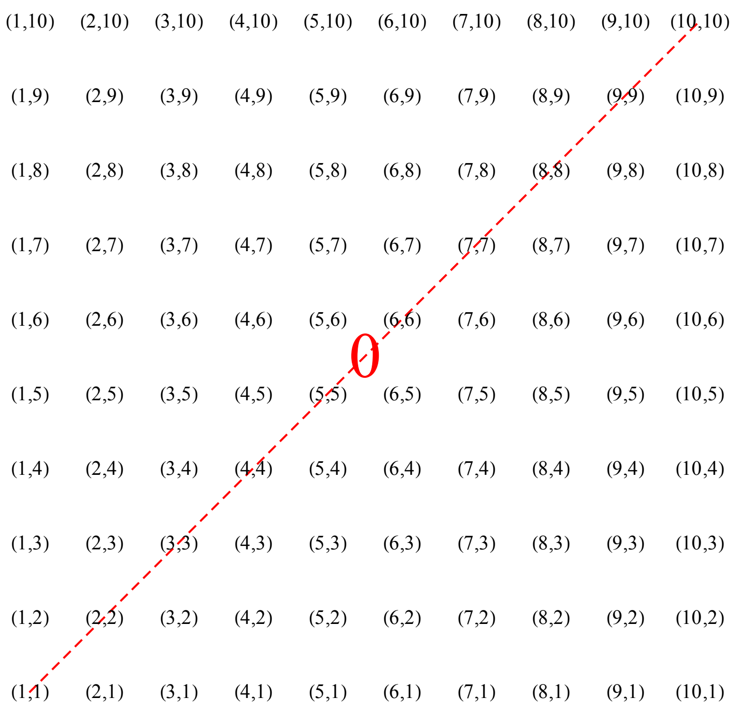

Figura 2: Rappresentazione del numero 0.

DEFINIZIONE ("immersione" di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$)

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$\phi(n) = [(1, n)]$$

Tale funzione ϕ è iniettiva, conserva somma e prodotto e il $\geq$: quindi $\phi(\mathbb{N})$ è una "copia" di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ (con tutte le sue proprietà).

Finalmente dimostriamo il seguente

TEOREMA $x \cdot 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

DIMOSTRAZIONE Sia $x = [(n, m)]$, allora

$$x \cdot 0 = [(n, m)] \cdot [(1, 1)] = [(n \cdot 1 + m \cdot 1, n \cdot 1 + m \cdot 1)] = [(n + m, n + m)] = [(1, 1)] = 0$$

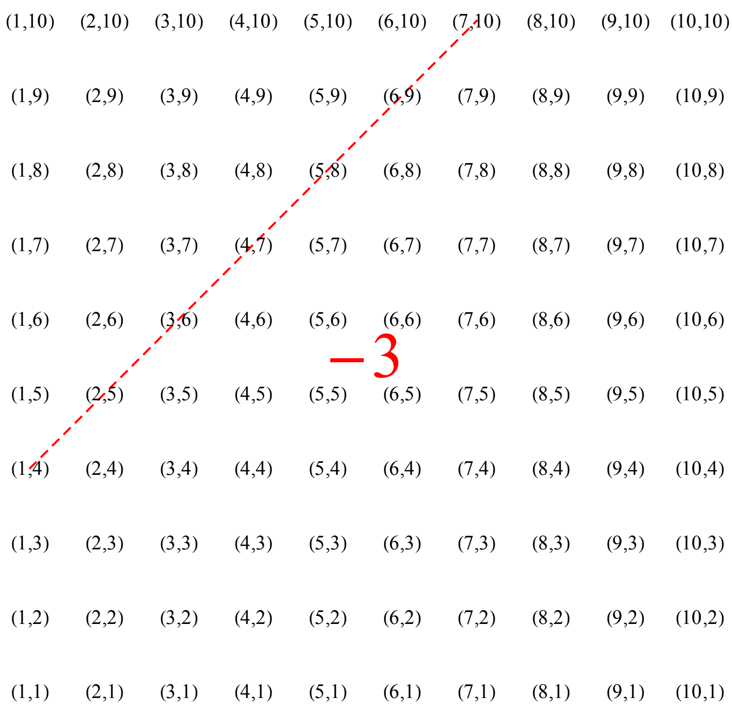

Figura 3: Rappresentazione del numero -3.

Costruzione di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ a partire dagli assiomi di Peano (cenni)

Per costruire $\mathbb{Q}$ si introduce la seguente relazione (che si dimostra essere) di equivalenza:

$$(n, m) \sim_{\mathbb{Q}} (p, q) \Leftrightarrow n \cdot q = m \cdot p$$

(Si noti che tale definizione è "simile" a quella data per $\sim_{\mathbb{Z}}$ dove si è sostituito alla somma il prodotto).

A questo punto (e con un po' di pazienza) si verificano tutte le proprietà di $\mathbb{Q}$, ossia i primi quindici assiomi dei numeri reali. Infatti, $\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato (che non ha sottocampi propri).

Naturalmente, come ben sappiamo, $\mathbb{Q}$ non soddisfa il sedicesimo assioma. Per questo bisogna ora costruire $\mathbb{R}$.

Costruzione di Cantor (analitica) Sia $\{a_n\}$ una successone a valori razionali, vale a dire un'applicazione

$$n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{Q}$$

DEFINIZIONE (successione di Cauchy)

Se comunque scelgo un ε razionale (strettamente) positivo esiste un $N \in \mathbb{N}$ per cui

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Considero l'insieme $\mathcal{R}$ delle successioni di Cauchy

$$\mathcal{R} = \{\{a_n\} \mid \{a_n\} \text{ è di Cauchy}\}$$

Introduco una relazione di equivalenza fra le relazioni di Cauchy

$$\{a_n\} \sim_{\mathbb{R}} \{b_n\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - b_m| < \varepsilon \; \forall n, m \geq N$$

DEFINIZIONE ($\mathbb{R}$)

$$\mathbb{R} = \{[\{a_n\}] \mid \{a_n\} \in \mathcal{R}\}$$

DEFINIZIONE (somma in $\mathbb{R}$)

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha = [\{a_n\}] \quad \beta = [\{b_n\}]$$

$$\alpha + \beta = [\{a_n + b_n\}]$$

DEFINIZIONE (prodotto in $\mathbb{R}$)

$$\alpha \cdot \beta = [\{a_n \cdot b_n\}]$$

$\mathbb{R}$, così costruito, verifica anche il sedicesimo assioma: *Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.*

(Ovviamente, con questo approccio, i 16 assiomi sono 16 teoremi da dimostrare; gli assiomi di partenza essendo quelli di Peano).